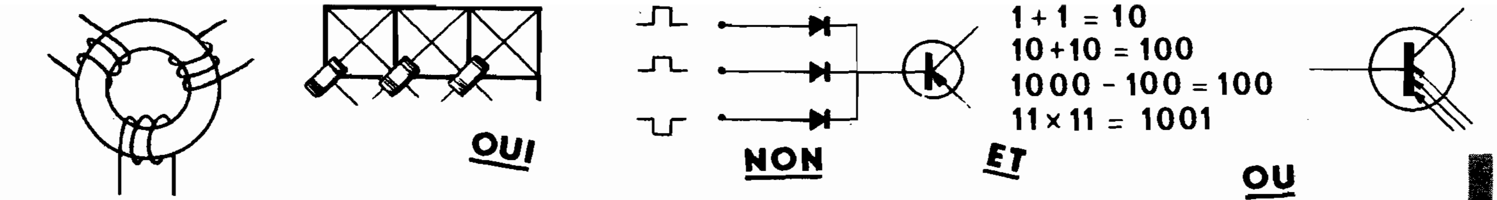

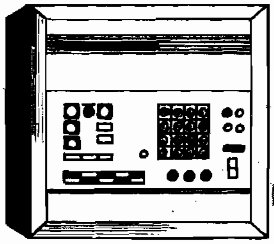

INITIATION AU CALCUL ELECTRONIQUE

ALGÈBRE DE BOOLE

LA logique graphique et la logique mathématique sont équivalentes, la dernière étant plus complète, mais se basant toujours sur les opérations ET, OU et NON. Les variables considérées sont indiquées par 1 ou 0 de la manière suivante : 1 lorsqu'une affirmation est vraie, 0 lorsqu'elle est fausse. Les symboles mathématiques tels que les signes « ● », « + » et les chiffres « 0 », « 1 », doivent, dans le cas général, être considérés plutôt comme des mots (ou des moyens d'exprimer un fait) et non comme ayant l'effet opérateur mathématique. Ce dernier, toutefois, peut parfois se produire.

Cette logique, parfaitement rigoureuse a été créée par G. Boole en 1850, mais c'est surtout depuis quelques dizaines d'années que son utilité a été reconnue.

En plus des signes tels que 1 (vrai), 0 (faux), on utilise des signes surmontés d'une barre qui s'écrivent comme suit :

$$\bar{1},\ \bar{0},\ \bar{A},\ \bar{B}$$

Le signe ET peut être remplacé par le point « ● » et le signe OU par + (ou + entouré d'un cercle).

La barre indique qu'il s'agit du signe opposé à celui du signe considéré sans barre :

Exemples :

$\bar{1}$ signifie 0

$\bar{0}$ signifie 1

$\bar{A}$ signifie non A

Des signes tels X et $\bar{X}$ (X pouvant être 1, 0, A, B...) se nomment complémentaires.

La lecture orale se fait comme suit :

$\bar{1} = 1$ barre (et non **barré !**)

$\bar{0} = 0$ barre

$\bar{A} = A$ barre

La signification de la barre est NON. Ainsi, si une chose vraie (par exemple le chapeau est rouge) s'exprime par 1, le contraire (le chapeau n'est pas rouge) s'exprime par 0 ou par non 1 ou par $\bar{1}$.

Dans le cas des OU, on peut utiliser le signe + (ou + entouré d'un cercle).

Dans de nombreux textes d'origines diverses (livres, notices, cours, articles) français ou étrangers, on utilise encore les signes :

∩ et ∧ pour ET
∪ et ∨ pour OU
et ⌣ pour NON ou la barre.

LES FONCTIONS ET et OU

Soit un **ensemble** d'éléments analogues, par exemple des diodes parmi lesquelles certaines sont à vide et les autres semi-conductrices.

On peut dire que dans cet ensemble, il y a des diodes à vide (désignées par A) ET des diodes semi-conductrices (désignées par B) donc pour cet ensemble on peut écrire A ET B ou, selon l'algèbre de Boole

A ET B = A ● B ou encore AB

Dans le même ensemble de diodes à vide et diodes semi-conductrices (A, B), une diode quelconque, prise au hasard, est :

à vide ou semi-conductrice
donc A OU B

que nous écrirons A + B selon la convention indiquée plus haut qui veut que OU soit remplacé par + (ou + cerclé ou V).

Finalement on écrira :

A OU B = A + B

Considérons maintenant les opérations effectuées sur 0 et 1. On a indiqué précedemment les opérations ET (ou « ● »)

$$0 \bullet 0 = 0$$
$$0 \bullet 1 = 0$$
$$1 \bullet 0 = 0$$
$$1 \bullet 1 = 1$$
$$\bar{1} \quad = 0$$

Si l'on remplace 0 par **faux** et 1 par **vrai**, le signe ● par ET, il vient

faux ET faux = faux
faux ET vrai = faux
vrai ET faux = faux
vrai ET vrai = vrai

Ceci est d'ailleurs logique. Un ensemble est globalement faux si une partie de cet ensemble est faux.

Considérons maintenant les opérations avec OU.

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$
$$\bar{0} \quad = 1$$

En remplaçant 0 par faux, 1 par vrai, + par OU, considérons le cas de l'ensemble à diodes et considérons une **diode à vide.** Il est donc :

faux que la diode est semi-conductrice (0)

faux que la diode n'est pas à vide (0)

Ici 0 + 0 = faux OU faux signifie deux fois de suite que la diode n'est pas semi-conductrice donc 0 + 0 = 0. Ensuite 0 + 1 = faux OU vrai autrement dit : la diode n'est pas à vide OU elle est à vide, cette affirmation est parfaitement vraie, donc on a bien

$$0 + 1 = 1$$

et on trouve de la même manière la justification de

$$1 + 0 = 1$$

1 + 1 peut s'exprimer : la diode est à vide OU la diode est à vide, c'est dire deux fois la même chose donc, la diode est à vide :

$$1 + 1 = 1$$

Théorème 1 ● A = A

Dans ce théorème logique, A peut être 0 ou 1. La vérification, qui est aussi la démonstration, s'effectue comme suit :

1° Si A = 0 on a
$1 \bullet A = 1 \bullet 0 = 0 = A$

2° Si A = 1
$1 \bullet A = 1 \bullet 1 = 1 = A$

Dans les deux cas $1 \bullet A = A$.

Théorème 1 + A = 1

A peut être 0 ou 1.
Si A = 0 on a :
$1 + A = 1 + 0 = 1$
Si A = 1 on a :
$1 + A = 1 + 1 = 1$

le signe + ayant la signification OU et non « plus ».

Théorèmes 0 ● A = 0 et 0 + A = A

En effet, pour $0 \bullet A = 0$
si $A = 0,\ 0 \bullet A = 0 \bullet 0 = 0$
si $A = 1,\ 0 \bullet A = 0 \bullet 1 = 0$
Pour 0 + A = 0 on a :
si $A = 0,\ 0 + 0 = 0$
si $A = 1,\ 0 + 1 = 1$

Théorèmes de commutation

OU : A + B = B + A

ou A et B peuvent être 0 ou 1.

La vérification peut s'effectuer sur les quatre cas possibles : A = 0, B = 0; A = 0, B = 1; A = 1, B = 0 et A = 1, B = 1.

ET : AB = BA.

Même vérification.

Théorème d'association OU

A + (B + C) = (A + B) + C relation dans laquelle A, B et C peuvent être 0 ou 1. Comme il y a trois variables A, B et C, il y a huit combinaisons possibles que donne le tableau : I

et le lecteur attentif remarquera aisément que les **lignes** représentent des nombres binaires depuis 0 jusqu'à 7, à condition de ne pas tenir compte des zéros placés devant un chiffre significatif, à sa gauche.

En effet :

0 0 0 = 0 = zéro
0 0 1 = 1 = un
0 1 0 = 10 = deux
0 1 1 = 11 = trois
1 0 0 = quatre
1 0 1 = cinq
1 1 0 = six
1 1 1 = sept

TABLEAU I

	A	B	C	A + B	A + C	BC
a_0	0	0	0	0	0	0
a_1	0	0	1	0	1	0
a_2	0	1	0	1	0	0
a_3	0	1	1	1	1	1
a_4	1	0	0	1	1	0
a_5	1	0	1	1	1	0
a_6	1	1	0	1	1	0
a_7	1	1	1	1	1	1

Vérifions, par exemple la combinaison a_2 : A = 0, B = 1 et C = 0.

On a :

$A + (B + C) = 0 + (1 + 0) = 0 + 1 = 1$

$(A + B) + C = (0 + 1) + 0 = 1 + 0 = 1$

Théorème d'association ET

$A\,(BC) = (AB)\,C$

Les huit combinaisons possibles sont $a_0 \ldots a_7$ indiquées plus haut et on vérifie aisément en théorème.

Remarquons d'ailleurs que les produits booléens (fonction ET) donnent les mêmes résultats que les produits mathématiques normaux.

Théorème de distribution

$AB + AC = A\,(B + C)$

Vérifions à l'aide du choix du groupe, a_5 par exemple ou A = 1, B = 0, C = 1.

L'expression s'écrit, pour le membre de gauche :

$AB + AC = 1 \bullet 0 + 1 \bullet 1 = 0 + 1 = 1$

et pour le membre de droite :

$A\,(B + C) = 1\,(0 + 1) = 1 \bullet 1 = 1$

ce qui vérifie ce théorème où entrent des produits (ET) et des sommes (OU).

Un autre théorème de distribution est :

$(A + B)\,(A + C) = A + BC$

ce qui ne semble pas évident **a priori**. Un moyen simple de prouver que cette relation est vraie est de la vérifier à l'aide des huit combinaisons du tableau I. Soit par exemple la combinaison a_6 : A = 1, B = 1, C = 0, A + B = 1, A + C = 1, BC = 0 donc

$(A + B)\,(A + C) = 1 \bullet 1 = 1$

$A + BC = 1 + 0 = 1$

donc 1 = 1

Prenons aussi la combinaison de la ligne a_7 : A = 1, B = 1, C = 1, A + B = 1, A + C = 1, BC = 1.

On a, par conséquent :

$(A + B)\,(A + C) = 1 \bullet 1 = 1$

A + BC = 1 + 1 = 1 (et non 2) donc les deux termes sont égaux à 1.

Relations avec les termes « barre »

Dans des relations entre A et B on peut introduire également les termes $\bar{A}$ (A barre) et $\bar{B}$ (B barre) qui se lisent **barre** (et non barré).

Rappelons que si A est 1, $\bar{A}$ est 0, et si A est 0, $\bar{A}$ est 1 et il en est de même de B et $\bar{B}$ ou de n'importe quel autre terme.

Une relation entre A, B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ est la suivante :

$(A + B)\,(\bar{A} + \bar{B}) = \bar{A}B + A\bar{B}$

Soit le cas de A = 1 et B = 0 par exemple si A = 1, $\bar{A} = 0$ et si B = 0, $\bar{B} = 1$ donc dans ce cas particulier on a :

$(A + B)\,(\bar{A} + \bar{B}) = (1 + 0)\,(0 + 1) = 1 \bullet 1 = 1$

D'autre part :

$\bar{A}B + A\bar{B} = 0 \bullet 0 + 1 \bullet 1 = 0 + 1 = 1$

D'une **manière générale** :

$(A + B)\,(\bar{A} + \bar{B}) = A\bar{A} + B\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$

mais $A\bar{A}$ et $B\bar{B}$ sont toujours égaux à zéro car l'un des facteurs de chaque produit est nul.

Il reste par conséquent :

$(A + B)\,(\bar{A} + \bar{B}) = \bar{A}B + A\bar{B}$

Une autre relation est la suivante :

$AB + \bar{A}\bar{B} = (A + \bar{B})\,(\bar{A} + B)$

qui se démontre aisément dans le cas général.

On a en effet :

$(A + \bar{B})\,(\bar{A} + B) = A\bar{A} + AB + \bar{A}\bar{B} + B\bar{B}$

mais $A\bar{A}$ et $B\bar{B}$ sont seuls (voir plus haut), donc il reste $AB + \overline{AB}$ et la relation est exacte.

Barre sur relations quelconques

Le signe barre peut être placé au-dessus d'une expression contenant plusieurs termes.

Par exemple :

$A\bar{B} + \bar{A}B$ et $\overline{A\bar{B} + \bar{A}B}$ sont des expressions complémentaires (si l'une est 0 l'autre est obligatoirement 1). Le calcul du terme à barre est facile. Il suffit de calculer d'abord l'expression sans barre puis de lui donner la valeur contraire (0 au lieu de 1 et 1 au lieu de 0.

Voici une relation à barre sur une expression

$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$

Vérifions-la par les cas particuliers possibles.

Cas a_0 : A = 0, B = 0 et $\bar{A} = 1$, $\bar{B} = 1$. Il vient : A + B = 0 et A + B = 1.

D'autre part, $AB = 0 \bullet 0$ donc $\bar{A}\bar{B} = 1 \bullet 1 = 1$. Il sera facile de vérifier cette relation pour les cas a_1, a_2, a_3 (voir tableau I).

Une autre relation de ce genre est :

$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

Remarquons que cette expression est équivalente à :

$\overline{BA} = \bar{B} + \bar{A}$

donc, trois cas peuvent se présenter.

1° A et B sont égaux à 1.
2° A et B sont égaux à 0.
3° L'un est 0 et l'autre 1.

Cas 1 :

$\overline{AB} = \bar{1} = 0$

$\bar{A} = 0$, $\bar{B} = 0$ donc $\bar{A} + \bar{B} = 0$

Cas 2 : A et B sont égaux à 0.

$\overline{AB} = \overline{0 \bullet 0} = \bar{0} = 1$

$\bar{A} = 1$, $\bar{B} = 1$, $\bar{A} + \bar{B} = 1 + 1 = 1$ comme on l'a indiqué précédemment.

Cas 3 : A et B sont opposés donc les produits AB sont nuls et $\overline{AB} = 1$ tandis que $\bar{A} + \bar{B} = 1 + 0 = 1$, donc la relation est vérifiée.

Les deux relations ci-dessus que nous écrivons à nouveau :

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$$
$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

constituent le théorème de Morgan.

Tableau des théorèmes booléens

On trouvera au tableau II les principaux théorèmes qu'il convient de connaître lors de l'étude du calcul électronique. La plupart de ces théorèmes ont été indiqués et démontrés plus haut.

TABLEAU II

Théorèmes de l'algèbre de Boole				
(1)	$0 + A = A$	(12)	$A + AB = A$	
(2)	$1 + A = 1$	(13)	$A + \bar{A}B = A + B$	
(3)	$A + A = A$	(14)	$A\,(A + B) = A$	
(4)	$A + \bar{A} = 1$	(15)	$(A + \bar{B})\,B = AB$	
(5)	$0 \bullet A = 0$	(16)	$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$	Théorème de Morgan
(6)	$1 \bullet A = A$	(17)	$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$	
(7)	$A \bullet A = A$	(18)	$AB + A\bar{B} = A$	
(8)	$A \bullet \bar{A} = 0$	(19)	$A\bar{B} + \bar{A}B = (A + B)\,(\overline{AB})$ $= (A + B)\,(\bar{A} + \bar{B})$	
(9)	$\bar{0} = 1$	(20)	$\overline{A\bar{B} + \bar{A}B} = AB + \bar{A}\bar{B}$	
(10)	$\bar{1} = 0$	(21)	$AB + \bar{A}\bar{B} = (A + \bar{B})\,(\bar{A} + B)$	
(11)	$\bar{A} = A$			